Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

BSc. szakdolgozat

A Cassini-féle vetületek és térképészeti alkalmazásaik

Készítette:
Nemes Krisztián
Földtudományi BSc. Térképész - Geoinformatikus szakirány

Témavezető:
Dr. Györffy János
egyetemi docens
ELTE IK Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék

2010. május 15.

Előszó

A dolgozat a térképészet egyik összetettebb fejezetével, a leképezésekkel foglalkozik. A folyamat lényege, hogy a Földet, mint felületet helyettesítjük valamely egyszerűsített geometriai formával (általában ellipszoiddal, vagy gömbbel), majd ezt vetületek segítségével a síkba képezzük. Dolgozatomban először megismerkedünk a vetülettan azon részeivel, melyek szükségesek a Cassini-féle vetületek bevezetéséhez. Majd a vetületeket vizsgáljuk meg, először a gömbről, majd ellipszoidról a síkba képezve. Ezek után a vetület alkalmazási területeiről esik néhány szó. Végül egy-egy egyszerű számolóprogram segítségével összehasonlítjuk a két alapfelületről való leképezést, pontosság szempontjából. Célom, hogy a témát a lehető legérthetőbben vázoljam, és ábrákkal gazdagon illusztrálva segítsem elő annak megértését.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Györffy Jánosnak a sok segítségért, az építő kritikákért, és a türelméért; Dr. Jesus Reyesnek a CorelDraw alkalmazásában, a testvéremnek – Nemes Gergőnek – pedig a szakdolgozat elkészítésében nyújott segítségéért. Köszönöm továbbá Dr. Timár Gábornak, hogy rendelkezésemre bocsátotta a II. katonai felmérés alkalmával készült Budapest térképet (8.1. ábra); Verebiné Dr. Fehér Katalinnak, Dr. Strenk Tamásnak és Dr. Varga Józsefnek a segítséget.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

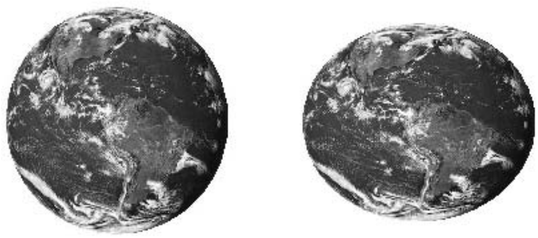
1.1. A térkép

A térkép, mint eszköz nagyon régi találmány. Már az őskorból maradtak ránk olyan rajzok, melyek térképként funkcionáltak. A térkép lényege, hogy a Föld felszínét egyszerűsített formában, könnyen értelmezhető módon ábrázolja, általában a síkra leképezve. Pontosítva az előbb említett térkép-definíciót, a térkép a Földön és más égitesten vagy a világűrben található természeti és társadalmi jellegű tárgyak, jelenségek vagy folyamatok méretarány szerint kicsinyített, generalizált, magyarázó ábrázolása a **síkban**. Ahhoz, hogy térképet készítsünk – mely megfelel a mai elvárásoknak – három fő lépést kell megtennünk: ki kell választanunk a megfelelő alapfelületet, a képfelületet, melyre leképezünk, és magát a leképezés módját.

2. fejezet

Alapfelületek

A térképészetben általában a Földet, mint égitestet tekintjük kiindulási felületnek, hiszen a rajta található objektumokat (folyók, hegyek, épületek, utak stb.) szeretnénk megjeleníteni. De mint tudjuk, a Föld felszíne igen egyenetlen az eltérő domborzati jelenségek miatt: a legmagasabb pontja a Mount Everest a maga 8 848 méterével. Ezzel szemben a legmélyebb pontja a Mariana-árok, mintegy 11 000 méterrel a Csendes-óceán alján. Láthatjuk, hogy ez a magasságkülönbség nagyjából 20 000 métert tesz ki. A másik méretbeli torzulást a Föld saját tengelye körüli forgása adja. Ennek következtében az Egyenlítő környékén egy kicsit kidudorodik, míg a sarkoknál benyomódik, vagyis torzul.

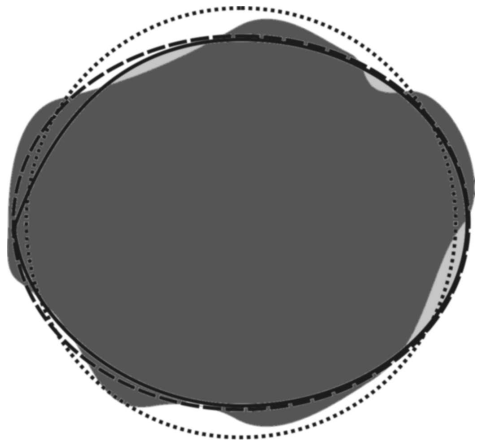


2.1. ábra. A Föld gömbi, és valódi alakja (eltúlozva)

Beláthatjuk, hogy ezt figyelembe véve igen nehéz lenne pontos matematikai formulákat adni a Föld alakjának leírására. Ahhoz, hogy egy felület alkalmazható lehessen alap- és képfelületként, három szabálynak kell eleget tennie:

- legyen folytonos
- szabályos
- zárt matematikai képlettel leírható

Az első két feltétel egyértelműen értelmezhető. A matematikai képlettel (vagy sorba fejtéssel) való leírásnak két módja van: két- vagy háromdimenzióban. Most tekintsük át a lehetséges alapfelületeket. Bár az alábbi kép kissé el van túlozva, mégis jól látszódik az egyes felületek közötti különbség.



2.2. ábra. A lehetséges alapfelületek egymáshoz viszonyítva (torzított)

A 2.2 ábrán láthatóak az alapfelületek oldalnézeti metszetben. A sötétszürke színű alak a valódi Földalakot, a világosabb szürke szín a tengereket, óceánokat jelképezi. A folytonos vonal a geoidot, a szaggatott az ellipszoidot, míg a pontozott a kört szemlélteti.

- Valódi (fizikai) Földalak

Bár ez lenne a legpontosabb, hiszen figyelembe veszi a domborzatot is, mégsem alkalmazhatjuk alapfelületként, mert noha folytonos, de nem teljesül rá a szabályosság.

- Geoid

Geoidnak nevezzük azt a felületet – a Föld alakjából kiindulva –, ahol a nehézségi erők szintfelülete a nyugalmi tengerszinttel esik egybe. Ez már kevésbé pontos, és erre sem teljesül a szabályosság, így ez sem alkalmazható.

- Ellipszoid

Az ellipszoid közel áll a geoidhoz, kevésbé pontos ugyan, de előnye, hogy szabályos, és van rá matematikai formula. Így leginkább ezt alkalmazzuk, mint alapfelületet. Megemlítendő az úgynevezett geoidunduláció fogalma, ami lényegében a geoid és az ellipszoid közötti különbséget jelenti, értéke maximum 60 méter.

- Gömb

A gömb pontatlan, mint alapfelület. Ez épp a szabályossága miatt adódik. Továbbá folytonos, és zárt matematikai képlettel leírható, tehát ez is alkalmazható, ha a pontatlanságból eredő hátrány elhanyagolható a használatából származó előnyök mellett.

A matematikai képlettel való megadásnak egy másik csoportosítása, hogy milyen formában kívánjuk megadni a képletet:

- egyenlet
- függvény
- vagy paraméteres alak formájában

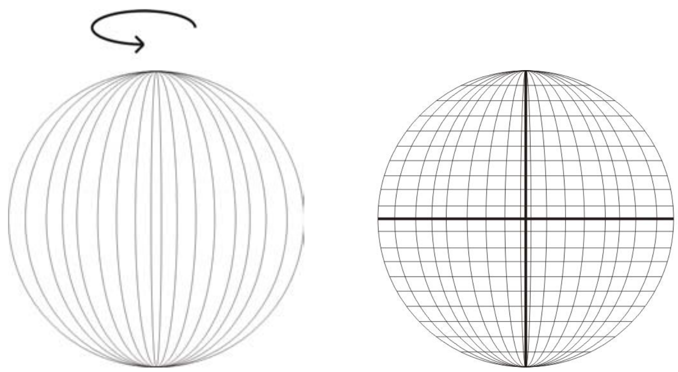
Nem csak térbeli alakzatok lehetnek alapfelületek. Akár a síkban ábrázolt kört, és ellipszist is vehetjük kiindulási alapnak.

Megjegyzés. Természetesen nem csak a Föld lehet a kiindulási felület. Bármely más égitest is lehet egy térkép alapja.

2.1. A gömb

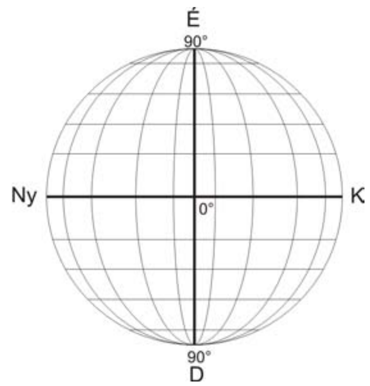
Ha a kört valamelyik tengelye körül elforgatjuk, gömböt kapunk. A gömbnek – akár a körnek – a sugár (jele R) a legfontosabb paramétere. A gömb kiválóan alkalmas alapfelület a Föld egyszerűsített ábrázolására. Hogy alkalmazható legyen alapfelületként, szükség van egy hálózatra a felületén, mely segíségével a felület egy tetszőleges pontját egyértelműen azonosíthatjuk. Ez a hálózat hosszúsági (függőlegesen) és szélességi körökből (vízszintesen, másik neve a parallel kör) áll. A szélességi körök és a hosszúsági körök egymásra merőlegesek. Az így kapott hálót fokhálózatnak nevezzük.

Mind a szélességi, mind a hosszúsági köröknek van egy kitüntetett kezdőköre. Előbbinek általában az úgynevezett Egyenlítő, ami a leghosszabb szélességi kör (az ábrán kiemelve). A hosszúsági köröknél (meridiánoknál) általában megegyezés alapján jelölnek ki egy kitüntetett kört, amit kezdőmeridiánnak nevezünk. A leggyakrabban alkalmazott a Greenwich-en áthaladó hosszúsági kör, de megemlíthetjük még a ferrói és pulkovói kezdő hosszúsági kört is. A szélességi körök párhozamosan futnak, egyenlő távolságra egymástól. Ezt a távolságot fokban mérik, ahogy a



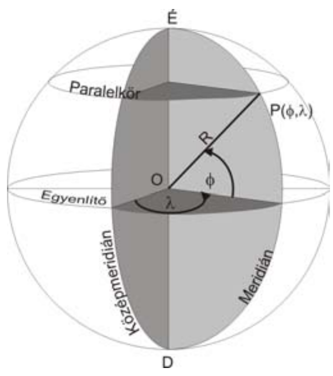
2.3. ábra. A körök elforgatásából kapott gömb, majd fokhálózattal

meridiánoknál is. A 2.3. ábrán láthatjuk, hogy a szélességi körök távolodva az Egyenlítőtől egyre rövidülnek. A legrövidebb szélességi kört már csak egy ponttal jelöljük. Ebben a pontban futnak össze a hosszúsági körök. Két ilyen pont létezik: az Egyenlítőtől "felfelé" találhatót Északi-sarknak (É), a tőle "lefelé" találhatót Déli-sarknak nevezzük (D). Fontos megemlítenem, hogy az előbb említett fokhálózatot az Egyenlítőtől É–D-i irányban 90°-ig számozzák, míg a meridiánokat a kezdőkörtől "balra" (nyugati Ny), és tőle "jobb" (keleti K) irányba 180°-ig számozzák.



2.4. ábra. A kitüntetett irányok

Ahhoz, hogy egy – a gömb felszínén található – pontot egyértelműen azonosítsunk, tudnunk kell, hogy melyik hosszúsági, illetve melyik szélességi körön fekszik. Ezt az alábbi 2.5. ábra szemlélteti.



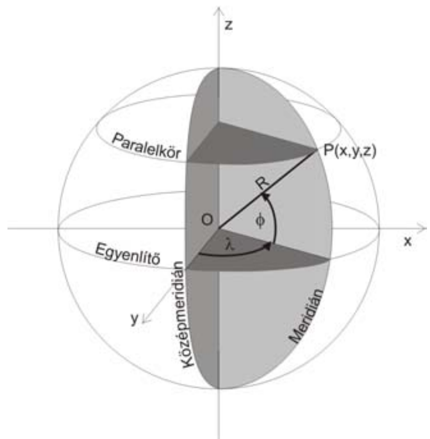
2.5. ábra. Egy tetszőleges pont (P) a gömbön

Első lépésként ki kell jelölnünk a kezdőmeridiánt. Ettől számítjuk annak a merindiánnak a távolságát, amelyen a pont fekszik. Ezt a távolságot a görög ábécé λ (kis lambda) betűjével jelöljük. A pont szélességi körének távolságát az Egyenlítőtől mérjük, ennek a jele a görög ábécé φ vagy másként ϕ (kis fi) betűje. E két szög segítségével egyértelműen megadhatóak a pont térbeli derékszögű koordinátái, azaz x, y és z értékek:

$$x = R\cos(\varphi)\cos(\lambda), \tag{2.1}$$

$$y = R\cos(\varphi)\sin(\lambda), \tag{2.2}$$

$$z = R\sin(\varphi). \tag{2.3}$$



2.6. ábra. Az előző ábra derékszögű koordinátarendszerben

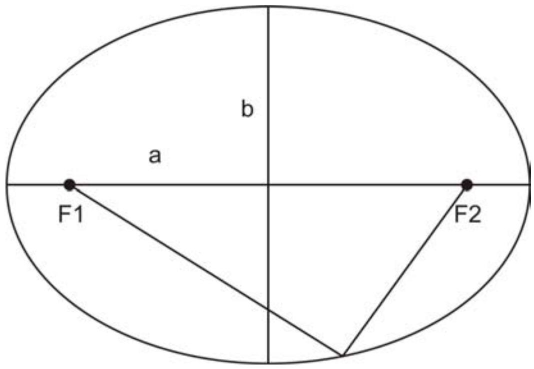
Az origo középpontú, R sugarú gömb egyenlete pedig az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{2.4}$$

képlettel írható fel.

2.2. Az ellipszis

Az ellipszis görbe azon pontok mértani helye egy síkon, ahol a pontok két rögzített ponttól mért távolságának összege állandó. A két pontot fókuszpontnak vagy gyújtópontnak nevezzük ($F1, F2$). Két fontos tengelye van: az egyik az úgynevezett főtengely, felét jelöljük a-nak, a másik a kistengely, felét jelöljük b-nek. Ha a féltengelyek értéke megegyezik, akkor r sugarú kört kapunk, ahol r a féltengely hossza.



2.7. ábra. Az ellipszis

Az ellipszis másik fontos paramétere a lapultsága, jele: f. A lapultság mértéke a következő képlettel adható meg:

$$f = \frac{a-b}{a}. \tag{2.5}$$

Láthatjuk, hogy értéke a féltengelyektől függ, és mivel b mindig kisebb az a-nál (kivéve a kört, ahol egyenlőek, és f értéke ekkor pontosan 0, vagyis nincs lapultsága), ezért f értéke csak 0 és 1 közötti értéket vehet fel. Annál lapultabb egy ellipszis, minél nagyobb az a és b közötti különbség. Az egyenletből látszik, hogy a értéke nem lehet nulla. De ez egyértelmű, hiszen akkor már nem ellipszist kapnánk. A lapultság megadásának másik módja az úgynevezett első excentricitással történik, melynek jele e, kiszámításának képlete pedig

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}. \tag{2.6}$$

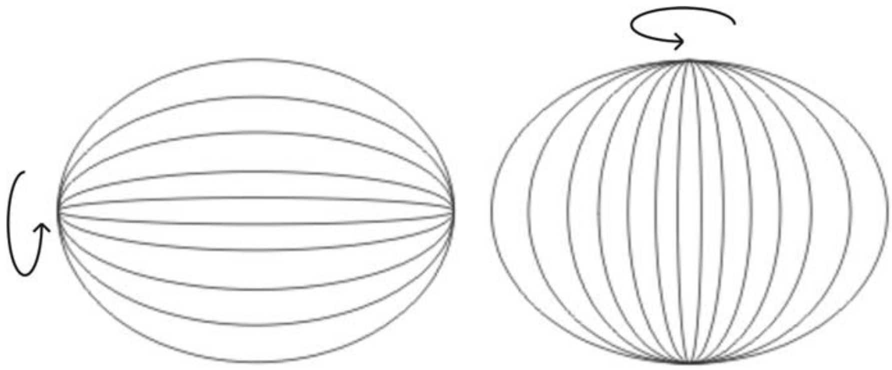
Kisebb hasonlóságot fedezhetünk fel f és e képlete között. Ebből adódik a kérdés, hogy egymással milyen kapcsolatban állhatnak. Elvégezve a levezetést az alábbi képletet kapjuk f-re:

$$f = 1 - \sqrt{1-e^2}. \tag{2.7}$$

Az első excentricitás a továbbiakban még fontos szerepet kap.

2.3. Az ellipszoid

Ha az ellipszist valamely tengelye (a, b) körül megforgatjuk, egy térbeli testet, ellipszoidot kapunk, ahogy azt a 2.8. ábrán is láthatjuk (citrom- és mandarinmodell). Az ellipszoidra is ugyanúgy érvényes a lapultság és az excentricitás fogalma.



2.8. ábra. Az a és b tengely körüli forgatással kapott ellipszoid

A gömbhöz hasonlóan az ellipszoidot is fokhálózattal látjuk el. Itt is vannak parallelkörök, sugaruk pedig: $R(\Phi) = N(\Phi)\cos(\Phi)$, ahol $N(\Phi)$ az úgynevezett harántgörbületi sugár. A meridiánok, mint ellipszisívek jelennek meg, simulókörüknek sugara az úgynevezett meridiángörbületi sugár (M(Φ)).

Láthatjuk, hogy mind a kettő egy paramétertől függ, amit a görög ábécé Φ (nagy fi) betűjével jelölünk, egy ellipszoid felszínén található pont geodéziai szélességét jelöli. A hosszúságát pedig a görög Λ (nagy lambda) betűvel jelöljük. A meridiángörbületi és a harántgörbületi sugarat az alábbi képletekkel adjuk meg:

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\Phi)}}, \tag{2.8}$$

$$M(\Phi) = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \sin^2(\Phi)\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.9}$$

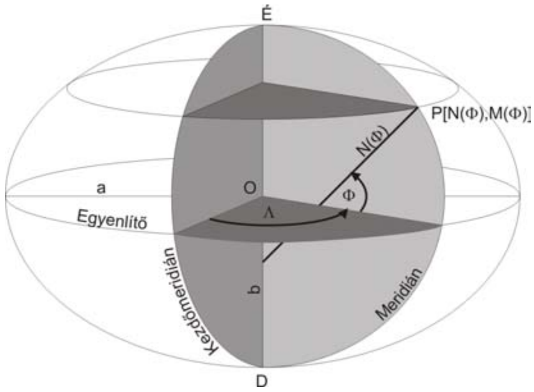
ahol a a fél nagytengely hossza, e^2 az ellipszoid excentricitásának négyzete, Φ pedig az adott szélesség. Az ellipszoidnál is lehetőségünk van megadni a pont térbeli derékszögű koordinátáit:

$$x = N\cos(\Phi)\cos(\Lambda), \tag{2.10}$$

$$y = N\cos(\Phi)\sin(\Lambda), \tag{2.11}$$

$$z = \frac{b^2}{a^2} N \sin(\Phi), \tag{2.12}$$

ahol N a harántgörbületi sugár, a a fél nagytengely hossza, b pedig a fél kistengely hossza.



2.9. ábra. Egy tetszőleges pont (P) az ellipszoidon

3. fejezet

Képfelületek

Képfelületnek nevezzük azt a felületet, ahová az alapfelületről leképezünk. A legtöbbször ez a felület egy sík, de általában ezt megelőzi egy másik felület, egy gömb, vagy henger, esetleg egy kúp. Az utóbbi kettő úgynevezett síkba fejthető felület, valamelyik alkotójuk mentén felvághatóak, és a síkba kiteríthetőek, és igazak rájuk a fentebb említett feltételek. Általában az adott felület palástját alkalmazzuk átmeneti felületnek. A síkra történő leképezés esetén rendszerint derékszögű koordinátarendszert alkalmazunk, ahol az x és y tengely valamely kitüntetett szélességi és hosszúsági kör egyenes vonalként levetített képe.

Megemlítendő még egy másik másik lehetséges módszer a síkban, a polárkoordináták alkalmazása. A számításokhoz sík-trigonometriát alkalmazunk.

A derékszögű koordinátarendszer x tengelye legyen a vízszintes tengely, az y tengely pedig a függőleges. Általában az alapfelületi kezdőmeridián és Egyenlítő metszéspontja adja a síkban a koordinátarendszer középpontját (az origo-t). Esetünkben a gömbről (5.1. ábra) egy transzverzális henger palástján át (5.2. ábra) a síkba képezünk (5.3. ábra). Ezt hármas leképezésnek is nevezik.

Megjegyzés. A geodéziában többnyire a függőleges tengelyt jelölik x-el, és az ettől az óramutató járásával megegyező irányba $90°$-kal elforgatott (vízszintes) tengelyt pedig y-nal.

4. fejezet

Leképezési módszerek

A térképkészítés folyamata egy felület pontjainak egy másik felület pontjaira történő matematikai leképezésén alapul. A vetületeket torzulásuk szerint három csoportra osztjuk:

- szögtartó
- területtartó
- általános torzulású

A szögtorzulási modulus (i) definíciója szerint az egymást metsző görbék érintője által bezárt alapfelületi δ és képfelületi δ' szögekre vonatkozólag:

$$i = \frac{\tan(\delta')}{\tan(\delta)}. \tag{4.1}$$

Ha a térkép egy pontjában bármely irányok által bezárt szögre $i = 1$-nek adódik, akkor a térkép e pontban szögtartó. Ha a térkép minden pontjában szögtartás áll fent, akkor szögtartó vetületről beszélünk. Most vizsgáljuk meg, mikor területtartó egy vetület. Ehhez vegyünk egy alapfelületi Δf felületdarabot, mely tartalmaz egy P pontot. Ennek képe egy $\Delta f'$ területű idom lesz a képfelületen. Most zsugorítsuk rá a P pontra az alapfelületi idomot úgy, hogy minden pontja egyenletesen konvergáljon P-hez, miközben $\Delta f \to 0$. Ha létezik a

$$\tau = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta f'}{\Delta f} \tag{4.2}$$

határérték, akkor ezt nevezzük a területtorzulási vagy területi modulusnak. Ha a térkép egy pontjában $\tau = 1$, akkor a térkép e pontban területtartó. Ha a térkép minden pontjában területtartás áll fent, akkor a vetületet területtartónak nevezzük.

Egy vetület nem lehet egyszerre terület- és szögtartó is. Ha viszont se nem területtartó, se nem szögtartó az adott vetület, akkor azt általános torzulásúnak nevezzük.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy egyetlen földi leképezés sem torzulásmentes.

Fel fogjuk használni a meridiánok és parallelkörök menti hossztorzulásokat differenciálhányadosok segítségével. Egy adott P pontra az egyenletek:

$$h = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}(\varphi_p, \lambda_p)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}(\varphi_p, \lambda_p)\right)^2}}{\cos(\varphi)}, \tag{4.3}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}(\varphi_p, \lambda_p)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}(\varphi_p, \lambda_p)\right)^2}, \tag{4.4}$$

ahol h a φ_p parallelkör menti hossztorzulás a λ_p hosszúságon, k pedig a λ_p meridián menti hossztorzulás a φ_p szélességen. A φ_p parallelkör és a λ_p meridián által bezárt Θ (teta) szög kotangense:

$$\cot\Theta = \frac{\frac{\partial x}{\partial\lambda}(\varphi_p, \lambda_p)\frac{\partial x}{\partial\varphi}(\varphi_p, \lambda_p) + \frac{\partial y}{\partial\lambda}(\varphi_p, \lambda_p)\frac{\partial y}{\partial\varphi}(\varphi_p, \lambda_p)}{\frac{\partial y}{\partial\lambda}(\varphi_p, \lambda_p)\frac{\partial x}{\partial\varphi}(\varphi_p, \lambda_p) - \frac{\partial x}{\partial\lambda}(\varphi_p, \lambda_p)\frac{\partial y}{\partial\varphi}(\varphi_p, \lambda_p)}. \tag{4.5}$$

4.1. Valódi hengervetületek

Esetünkben a gömbi felületről a síkba képezünk le. Célunk, hogy az eddigi alapfelületi földrajzi koordinátákhoz síkbeli koordinátákat rendeljünk. A Cassini-féle vetületek úgynevezett transzverzális négyzetes hengervetületek, melyek a valódi hengervetületek csoportjába tartoznak.

A valódi hengervetületeknél mind a meridiánok, mind a parallelkörök párhuzamos egyenesként jelennek meg a térképen, és a meridiánok képei merőlegesek a parallelkörök képeire. A fentebb említett h és k fokhálózat menti hossztorzulások a következőképpen alakulnak:

$$h = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}}{\cos(\varphi)} = \frac{\frac{dx}{d\lambda}}{\cos(\varphi)} = \frac{c}{\cos(\varphi)} = \frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)}, \tag{4.6}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \frac{dy}{d\varphi}, \tag{4.7}$$

ahol a c konstans értéke egyenlő a hossztartó parallelkör sugarának hosszával, ezért ez határozza meg annak helyét. Ha az Egyenlítőt választjuk hossztartónak, akkor

$c = 1$, ha viszont a $\pm\varphi_n$ szélességi kör hossztartó, akkor $c = \cos(\varphi_n)$. Ha $c > 1$, akkor nincs hossztartó parallelkör. Láthatjuk továbbá, hogy a hossztorzulások nem függenek λ-tól. Az utóbbi egyenlőségből (k) határozható meg az y vetületi egyenlet.

Meridiánban hossztartó valódi hengervetületek

Ha a vetület meridiánban hossztartó, akkor $k = 1$, vagyis

$$\frac{dy}{d\varphi} = 1, \tag{4.8}$$

tehát

$$y = \operatorname{arc}(\varphi). \tag{4.9}$$

Az x vetületi egyenlet megadása előtt tisztáznunk kell, hogy az Egyenlítő, vagy valamely más, $\pm\varphi_n$ szélességi kör-e a hossztartó. Ha az Egyenlítő, akkor

$$x = \operatorname{arc}(\lambda), \tag{4.10}$$

utóbbi esetben pedig

$$x = \cos(\varphi_n) \operatorname{arc}(\lambda). \tag{4.11}$$

Most nézzük a parallelkör menti hossztorzulást. Általában igaz, hogy

$$h = \frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)}. \tag{4.12}$$

Hossztartó Egyenlítő esetén ez a

$$h = \frac{1}{\cos(\varphi)} \tag{4.13}$$

egyenletté módosul. A vetület általános torzulású, a területtorzulási modulus a

$$\tau = h \cdot k = \frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)} \tag{4.14}$$

képlet szerint alakul, míg a szögtorzulási modulus ($2\Delta I_{\max}$) esetén három lehetőség áll fenn:

- ha $|\varphi| < \varphi_n$, akkor

$$2\Delta I_{\max} = 2 \arcsin \frac{1 - \frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)}}{1 + \frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)}} = 2 \arcsin \frac{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi) + \cos(\varphi_n)}, \tag{4.15}$$

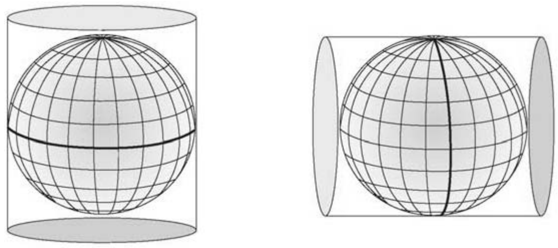
- ha $|\varphi| > \varphi_n$, akkor

$$2\Delta I_{\max} = 2 \arcsin \frac{\frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)} - 1}{\frac{\cos(\varphi_n)}{\cos(\varphi)} + 1} = 2 \arcsin \frac{\cos(\varphi_n) - \cos(\varphi)}{\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi)}, \tag{4.16}$$

- végül ha a vetület az Egyenlítőben hossztartó, akkor

$$2\Delta I_{\max} = 2\arcsin\frac{1-\cos(\varphi)}{1+\cos(\varphi)} = 2\arcsin\left(\tan^2\frac{\varphi}{2}\right). \tag{4.17}$$

Eddig a meridiánban hossztartó hengervetületekkel foglalkoztunk. Létezik azonban a hengervetület Egyenlítőben hossztartó változata is. Ilyenkor négyzetes hengervetületről beszélünk (ismeretes még a francia "plate carrée" kifejezés is). A "négyzetes" jelző abból adódik, hogy a fokhálózat a megegyező sűrűségű szélességi és hosszúsági körök ábrázolása esetén négyzethálós lesz.



4.1. ábra. A normál, és transzverzális hengervetület

Transzverzális helyzetben (4.1. ábra) a középmeridiánra, mint segédegyenlítőre merőleges segédmeridiánok (azaz gömbi főkörök, mint geodéziai vonalak) lesznek hossztartók. A vetületi egyenletek az alábbiak szerint módosulnak (feltéve, ha az Egyenlítő képe az x tengely):

$$x = \operatorname{arc}(\varphi^*), \tag{4.18}$$

$$y = \cos(\varphi_n^*)\operatorname{arc}(\lambda^*), \tag{4.19}$$

ahol φ_n^* a hossztartó segédparallelkör. Legyen a segédmeridián szerepét játszó középmeridián jele λ_k. Ha $\varphi_n^* = 0$, akkor a fokhálózat transzformációs egyenletei a következők:

$$\sin(\varphi^*) = \cos(\varphi)\sin(\lambda-\lambda_k), \tag{4.20}$$

$$\sin(\lambda^*) = \frac{-\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)\sin^2(\lambda-\lambda_k)}}. \tag{4.21}$$

Ezen egyenletek felhasználásával kapjuk az (5.1) és (5.2) egyenleteket, a vetületet pedig transzverzális négyzetes hengervetületnek, más néven a Cassini vetületnek nevezzük. Ennek ellipszoidi változata pedig Cassini–Soldner vetület.

5. fejezet

Cassini vetület

5.1. Vetületi egyenletek

A gömbi alapfelületről való leképezésnél az ismert pont φ és λ szögéből határozzuk meg a derékszögű koordinátarendszerben az adott pont x és y koordinátáit. Ehhez szükségünk van még egy másik ismert pont szögeire (φ_0, λ_0) is, és az adott gömbi alapfelület sugarára (R). Ez a pont esetünkben a középmeridián és az Egyenlítő vonalának találkozása, azaz az origó. Ezek ismeretében az alábbi formulákkal határozzuk meg x-et és y-t:

$$x = R \arcsin\left(\cos(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_0)\right), \tag{5.1}$$

$$y = R \left\{ \arctan\left[\frac{\tan(\varphi)}{\cos(\lambda - \lambda_0)}\right] - \varphi_0 \right\}, \tag{5.2}$$

$$l' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\cos(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_0)\right)^2}}. \tag{5.3}$$

Az y-tengely a középmeridián mentén fut, az y észak felé növekszik, az x-tengely pedig erre merőleges, x kelet felé növekszik. A hossztorzulás mértékét az l' adja meg a középmeridiánnal párhuzamosan, erre merőleges irányban viszont mindig állandó az értéke.

5.2. Inverz vetületi egyenletek

Ilyenkor a megadott x és y ismeretében visszaszámoljuk a pont φ és λ szögét. Az alábbi egyenletekkel kell számolnunk:

$$\varphi = \arcsin\left[\sin\left(\frac{y}{R} + \varphi_0\right)\cos\left(\frac{x}{R}\right)\right], \tag{5.4}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan\left[\frac{\tan\left(\frac{x}{R}\right)}{\cos\left(\frac{y}{R} + \varphi_0\right)}\right], \tag{5.5}$$

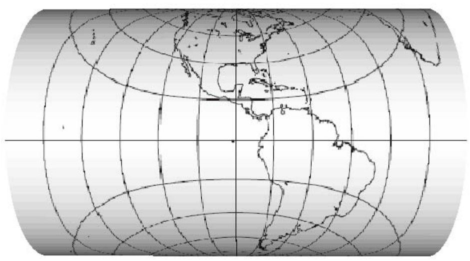
ahol φ_0 értéke radiánban van megadva.

5.3. Szemléltetés

Képekkel bemutatva a leképezés menetét, először kiválasztunk egy tetszőleges gömbi alapfelületet (5.1. ábra), majd a gömb felszínét egy transzverzális – a 4.1. ábrán szemléltetett – hengerre képezzük (5.2. ábra).

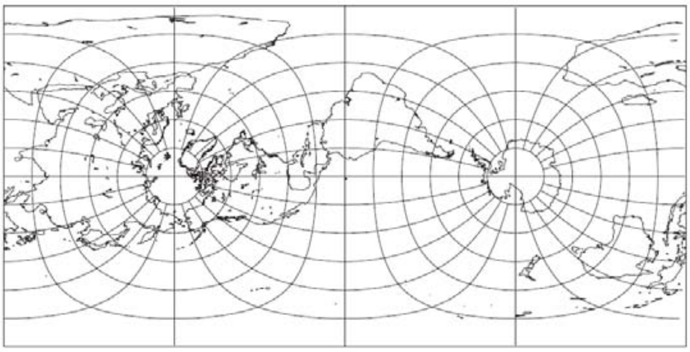
5.1. ábra. A Föld Cassini-vetületben (gömb)

Láthatjuk, hogy a nagyjából Guatemalavároson áthaladó középmeridián mentén nincs hossztorzulás, hiszen a henger itt érintkezik a gömbi alapfelülettel. Majd a



5.2. ábra. A Föld Cassini-vetületben (transzverzális henger)

henger palástját kiterítjük, és kapjuk a síkra leképzett képet az 5.3. ábrán. Ez az ábra még jobban szemlélteti hossztorzulás mértékét, távolodva a középmeridiántól (pl. Afrikánál).



5.3. ábra. A Föld Cassini-vetületben (sík)

6. fejezet

Cassini–Soldner vetület

6.1. Vetületi egyenletek

Az ellipszoidról való leképezésnél a középmeridiánra merőleges geodéziai vonalak lesznek hossztartók (a középmeridián egy ellipszis, a rá merőleges geodéziai vonalak pedig matematikailag bonyolult térgörbék). A pontos koordinátaszámoláshoz a vetületet a középmeridiántól csak 3-4°-nyi távolságig alkalmazhatjuk. A tengelyek megegyeznek a gömbi leképezés koordinátatengelyeivel. A számoláshoz meg kell adnunk egy ismert ellipszoidi kezdőpont szögeit (Φ_0, Λ_0). Ha egy pont derékszögű koordinátarendszer-beli x, y koordinátáit akarjunk kiszámolni, akkor meg kell adnunk egy már – az ellipszoid felszínén található – ismert pont Φ_0, Λ_0 szögeit, és az alábbi képletek (Clifford J. Mugnier 1979) [6] segítségével megkaphatjuk a keresett koordinátákat:

$$x = N\left[A - \frac{TA^3}{6} - (8 - T + 8C)\,\frac{TA^5}{120}\right], \tag{6.1}$$

$$y = M - M_0 + N\tan(\Phi)\left[\frac{A^2}{2} + (5 - T + 6C)\,\frac{A^4}{24}\right], \tag{6.2}$$

$$s = 1 + x^2\cos^2(Az)\,\frac{\left(1 - e^2\sin^2(\Phi)\right)^2}{2a^2\left(1 - e^2\right)}, \tag{6.3}$$

ahol

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\Phi)}}, \tag{6.4}$$

$$T = \tan^2(\Phi), \tag{6.5}$$

$$A = (\Lambda - \Lambda_0)\cos(\Phi), \tag{6.6}$$

$$C = \frac{e^2 \cos^2(\Phi)}{1 - e^2}, \tag{6.7}$$

és

$$M = a\left[\left(\frac{1-e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \cdots\right)\Phi - \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1025} + \cdots\right)\sin(2\Phi) + \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \cdots\right)\sin(4\Phi) - \left(\frac{35e^6}{3072} + \cdots\right)\sin(6\Phi) + \cdots\right]. \tag{6.8}$$

A Φ_0 és Λ_0 értékeit radiánban kell megadnunk. Az s a hossztorzulás mértékét adja meg a kiválasztott Az azimut mentén, amit északi irányból kelet felé adunk meg radiánban. Láthatjuk, hogy Φ_0-tól és x-től függ. Az N a már ismert harántgörbületi sugár, M pedig a középmeridián menti távolsága a Φ-nek az Egyenlítőtől. M_0 ehhez hasonló, a Φ_0-ra vonatkoztatva. Megjegyezendő, hogy a választott Φ_0 nem befolyásolja a vetítés alakját.

6.2. Inverz vetületi egyenletek

Itt is hasonlóan járunk el, mint a gömbi alapfelület inverz vetületi egyenleteinél. Adott egy síkbeli pont x és y koordinátái derékszögű koordinátarendszerben, adott továbbá egy ellipszoidi kezdőpont Φ_0 és Λ_0 értéke, és ezekből az alábbi képletek (Clifford J. Mugnier 1979) [6] segítségével számíthatjuk ki az ellipszoidi felületen keresett pont Φ és Λ szögeit:

$$\Phi = \Phi_1 - \frac{N_1 \tan(\Phi_1)}{R_1}\left[\frac{D^2}{2} - (1 + 3T_1)\frac{D^4}{24}\right], \tag{6.9}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \left[D - T_1\frac{D^3}{3} + (1 + 3T_1)\,T_1\frac{D^5}{15}\right]\cos(\Phi_1), \tag{6.10}$$

ahol

$$\Phi_1 = \mu_1 + \left(\frac{3e_1}{2} - \frac{27e^3}{32} + \cdots\right)\sin(2\mu_1) + \left(\frac{21e_1^2}{16} - \frac{55e_1^4}{32} + \cdots\right) \sin(4\mu_1) + \left(\frac{151e_1^3}{96} + \cdots\right)\sin(6\mu_1) + \left(\frac{1097e_1^4}{512} - \cdots\right)\sin(8\mu_1) + \cdots, \tag{6.11}$$

ahol Φ_1 az a szélesség a középmeridiánnál, aminek ugyanaz az y koordinátája, mint a $P(\Phi, \Lambda)$ pontnak.

$$e_1 = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}, \tag{6.12}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1}{a - \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \cdots\right)}, \tag{6.13}$$

$$M_1 = M_0 + y, \tag{6.14}$$

ahol M_0 értékét szintén a (6.8)-as képletből kapjuk. Továbbá:

$$T_1 = \tan^2(\Phi_1), \tag{6.15}$$

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\Phi_1)}}, \tag{6.16}$$

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\Phi_1)}}, \tag{6.17}$$

$$D = \frac{x}{N_1}. \tag{6.18}$$

7. fejezet

A vetületekről

Most vizsgáljuk meg magát a Cassini–Soldner vetületet. Először a vetület tulajdonságairól lesz szó, majd a kialakulásának történetéről, és végül megemlítjük a vetület szerzőit.

7.1. A vetületek főbb tulajdonságai

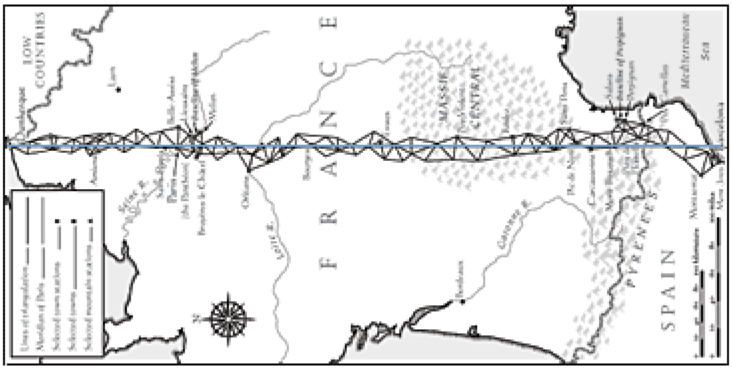
- Transzverzális hengervetület
- Sem területtartó, sem szögtartó
- A középmeridián és az ettől 90°-ra levő meridiánok, illetve az Egyenlítő képe egyenes (amennyiben $\varphi_0 = 0, \lambda_0 = 0$)
- A többi meridián és szélességi kör görbeként jelenik meg
- Nincs hossztorzulása a középmeridiánnak, és a rá merőleges geodéziai vonalaknak.

A vetület gömbi alakja hasonló a normál hengervetülethez, más néven a Plate Carrée-hez. A különbség abban nyilvánul meg, hogy míg utóbbiban mind a szélességi, mind pedig a hosszúsági körök egyenesként vannak ábrázolva, előbbiben ezek összetett görbékből állnak, kivéve a fentebb említett Egyenlítő, középmeridián és a tőle 90°-ra levő meridiánok, ahogy azt az 5.3 képen is láthatjuk. Az is észrevehető (pl. a már említett Afrikánál), hogy a középmeridiántól távolodva a hossztorzulás mértéke gyorsan növekszik. Mindezek ellenére a Cassini-vetület kiválóan alkalmas olyan területek ábrázolására, melyek észak - dél irányban kiterjedtebbek (mint Nagy-Britannia). Bár se nem terület-, se nem szögtartó, mégis a kettő közötti kompromisszumos megoldás. Az ellipszoidi alak számításához szükséges képletek a Transzverzális Mercator vetület képleteinek módosításai, és csak pár fokig alkalmazhatóak a középmeridiántól mindkét irányba [6].

Megjegyzés. A Cassini vetületet nevezték még "vetületnélküli" rendszernek is. Ez az elnevezés főleg a geodéták között terjedt el. A név a vetület pontatlanságából adódik, ami körülbelül 3 méter, ez pedig már túl sok ahhoz, hogy a geodéták pontosnak nevezzék.

7.2. A vetületek kialakulásának története

A vetületet Cassini de Thury találta fel, a híres Jean-Dominique Cassini unokája. 1745-től francia térképek készítésekor alkalmazták, míg le nem váltotta a Bonne vetület 1803-ban. A vetület a szélességi és hosszúsági vonalak ábrázolása helyett (kivéve a középmeridiánt) négyzetes rendszert használt, derékszögű koordinátarendszerrel. A Párizson áthaladó meridián képezte az egyik tengelyt (7.1. ábra).



7.1. ábra. A Párizson áthaladó meridián háromszögelése (elforgatva)

Ez a meridián hossztorzulásmentes volt, köszönhetően a pontos felméréseknek. A párizsi meridián első felmérésére a XVII. században került sor, Jean Picard (1620-1682) francia csillagász jóvoltából. Először csak a meridián egy kis szakaszát mérte fel, 1668-tól 1670-ig. 13 évvel később Philippe de la Hire (1640-1718) francia geodéta és matematikus, és J. D. Cassini (1625-1712) francia csillagász mérték fel a meridiánt, és olyan eredményre jutottak, miszerint a Föld nem lapult, hanem megnyúlt alakú. A probléma megoldását a mérőműszerek és a mérés pontosítása jelentette. J. D. Cassini fia, Jacques Cassini (1677-1756) francia csillagász és fizikus a merőleges főkörök mentén végzett fokméréseket, annak érdekében, hogy bebizonyítsa, a Föld valóban lapos, és nem megnyúlt (2.8. ábra).

Franciaország háromszögelési hálózata 1733 és 1740 között készült el. A hálózat szerkezete láncolatokból és egy koszorúból állt. A láncolatokat a párizsi meridiánív és a Párizson áthaladó merőleges főkör, valamint két további – a párizsitól egyenlő távolságra É-ra és D-re fekvő – merőleges főkör alkotta. Maga a koszorú az országhatáron és a tengerparton futott körbe. Az egész országot lefedő hálózat 18 alapvonalra támaszkodott és 400 háromszögből állt. A háromszögelés folyamata egyszerű trigonometriai számításokon alapult. Az eljárás a holland geodéta és matematikus, Willebrord Snellius (1581-1626) nevéhez fűződik. A folyamat lényege az volt, hogy a meridiánív hosszának kiszámítása az erre a célra kifejlesztett háromszögelési láncolat segítségével történt. Szükség volt egy alapvonalra, amiből háromszöget mértek, majd a kapott két új oldal (vonal) lett a következő (és az előzőhöz kapcsolódó) háromszögek alapvonala. A háromszög oldalainak hosszát sinus- és cosinustétellel számolták ki. A meridiánirányú oldalak kiszámolásához szükség volt a háromszögoldalak azimutjára is, amit csillagászati úton határoztak meg. Így tehát a kiszámolt meridiánirányú oldalak hosszának összegéből kapták a meridián hosszát.

1792 és 1798 között a meridiánív teljes európai szakaszát lemérték, a hálózatot pedig kiterjesztették Bécs és Anglia felé. A merőleges főkörök menti fokmérések jeletős szerepet játszottak a Cassini-féle vetület létrejöttében is.

A leképezés menetét később J. G. von Soldner vizsgálta, és ez vezetett el a XIX. század elején (1810) az ellipszoidi formulákhoz, és ettől kezdve lett a vetület neve Cassini–Soldner. Bár a vetületet manapság már kiszorította az úgynevezett Transzverzális Mercator vetület (ami igaz nagyon hasonlít hozzá, de szögtartó), még napjainkban is alkalmazzák sok országban, és főleg ezt a vetületet használták topográfiai térképezésre a XX. századig.

7.3. A vetületek megalkotói

Mint a legtöbb vetületi rendszert, ezt is a feltalálóiról nevezték el. Esetünkben ez a két személy Cassini és Soldner:

Cassini (1714 - 1784)

7.2. ábra. Cassini de Thury

Teljes nevén César-François Cassini de Thury, de nevezték még Cassini III-nak is. 1714. június 17-én született Thury-sous-Clermont-ban, Franciaországban. 1735-ben, 21 évesen már a Francia Tudományos Akadémia levelező tagja lett, mint csillagász 1741-ig, majd 1745-tól már rendes tag lett. Apja nyomdokait követve 1756-tól folytatta a felméréseket. 1744-ben kezdte el megalkotni Franciaország topográfiai térképét, ami mérföldkőnek számított a térképészet történetében.
Főbb munkásságai:

- La méridienne de l'Observatoire Royal de Paris (1744)
- A Cassini-féle transzverzális négyzetes hengervetület (1745)
- Description géometrique de la terre (1775)
- Description géometrique de la France (1784)

Az utolsó munkáját fia fejezte be, hiszen Cassini 1784. szeptember 4-én feketehimlőben meghalt.

Soldner (1776 - 1833)

7.3. ábra. J.G. Soldner

Teljes nevén Johann Georg von Soldner, aki egy német származású fizikus, matematikus, és csillagász volt. 1779-től Berlinben, majd később (pontosan 1808-tól) Münchenben dolgozott. 1776. július 16-án született Feuchtwangen-ben, egy farmer fiaként. Kiváló matematikai érzéke hamar megmutatkozott: apja földjének méretét saját módszereivel becsülte meg. Minden éjjel matematikát tanult, és térképeket nézegetett. 1796-ban magántanuló lett, nyelveket és matematikát tanult Ansbach-ban. 1797-ben Berlinbe ment, ahol geodétaként dolgozott a csillagász Johann Elert Bode keze alatt, és közben folyamatosan fejlesztette tudását új csillagászati és földmérési ismeretekkel. 1804 és 1806 között Ő lett a vezetője az Ansbach felmérését végző csoportnak. Majd 1808-ban Joseph von Utzschneider meghívására Münchenbe ment, ahol a háromszögeléssel foglalkozott az újonnan alakult Adófelmérési Bizottság megbízásából. 1815-ben csillagásznak jelölték, és tagja lett a Müncheni Tudományos Akadémiának. 1828-tól májbetegségben szenvedett, majd 1833. május 13-án meghalt.
Főbb munkásságai:

- A Ramanujan-Soldner állandó
- A Soldner-féle koordinátarendszer
- Az Euler-Mascheroni állandó megadása 24 tizedesjegyre
- A Cassini-féle transzverzális négyzetes hengervetület kiterjesztése ellipszoidra (1810)

8. fejezet

A vetületek alkalmazási területei

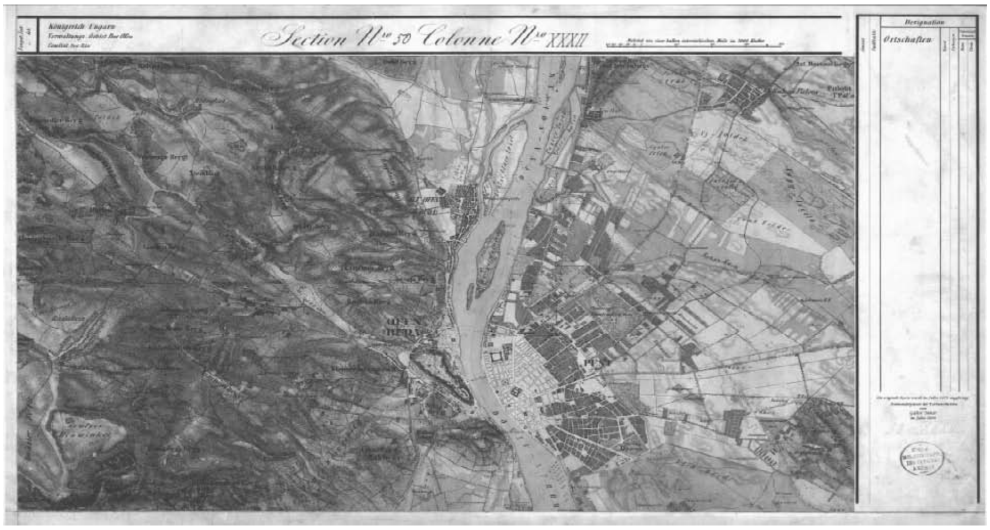
Ebben a fejezetben a Cassini–Soldner vetület alkalmazási területeiről lesz szó. Olvashattuk, hogy a vetületet napjainkra kiszorította a Transzverzális Mercator vetület, de így is sok ország alkalmazta topográfiai térkép készítésekor. Azt is láthattuk, hogy általában olyan országok ezek, melyek É–D irányú kiterjedése nagyobb, mint Ny–K felé. Először a magyarországi alkalmazásról lesz szó [8], majd további országok kerülnek bemutatásra.

8.1. A vetületek magyarországi vonatkozásai

Magyarországon először a Habsburg Monarchia II. katonai felmérése során alkalmazták a Cassini–Soldner vetületet, mégis, Strenk (1985) szerint már az I. katonai – úgynevezett Jozefiánus – felmérés (1763-1785) vetülete is transzverzális négyzetes hengervetület (azaz Cassini vetület) szerű volt, a szakirodalomban azonban egységesen vetületi és geodéziai alap nélküli térképrendszerként ismerték (Bod 1982; Stegena 1986; Vagács 1999).

A II. katonai felmérés

A II. katonai felmérés (1806-1869) – másnéven a Franciskánus felmérés – vetülete már inkább nevezhető Cassini–Soldner féle vetületnek, azaz annak csak egy közelítésének. Ennek oka a háromszögelés pontatlanságából adódik. A hálózat elsőrendű háromszögekből állt, 40-50 km hosszú oldalakkal, majd később sűrítették azokat negyed/ötöd rendű pontokig. A belső szögeknél ügyeltek arra, hogy lehetőleg csak 60° körüli szögekkel kelljen számolniuk. Az új háromszögek számításánál felhasználták a középmeridiánra merőleges vonalak hossztorzulásának állandóságát. Azonban a térképen a keletkező új háromszög helyén – attól függően, hogy az melyik másik háromszögekből keletkezett – szakadások jelentkeztek, főleg a középmeridiánnal párhuzamos irányban. A probléma oka a figyelmen kívül hagyott hossztorzulás volt, ami a háromszögelések közben jelentősen felhalmozódott. A mértéke többszáz kilométeres távolságokban akár több kilométer is lehetett. Tehát a pontosság attól függött, milyen útvonalon (melyik háromszögeken keresztül) jutottak el az adott ponthoz. Ez különböző útvonalakon más és más koordinátaértéket jelentett. Ezért nevezik a felmérés vetületét vetület nélküli rendszernek [7].



8.1. ábra. A budapesti szelvény

A szelvények méretaránya 1 : 28 800, a részletesebbeké (ún. Spezialkarte) pedig Magyarországon 1 : 144 000. A részletes térképek 3x3 felmérési szelvény által mutatott területet ábrázolnak. Georeferenciát csak a részletes térképeken találunk, a térkép keretén a földrajzi fokhálózat fok-perc pontossággal van feltüntetve. A hosszúságok a ferroi kezdőmeridiántól vannak számozva, $17^\circ\,39'\,46,02$"-re a ma használatos greenwichi kezdőmeridiántól. A hálózat kezdőpontja a bécsi Stephansdom ($\Phi = 48^\circ\,12'\,34", \Lambda_G = 16^\circ\,22'\,29"$) legmagasabb pontja volt. A Magyar Királyság területére már más kezdőpontot alkalmaztak. Ez a hossztorzulás mértékének növekedése miatt vált szükségessé. A szorosan vett magyarországi területek kezdőpontja a gellért-hegyi csillagvizsgáló keleti tornya ($\Phi = 47^\circ\,29'\,14,97", \Lambda_F = 36^\circ\,42'\,51,57"$) volt. Az Erdélyi Fejedelemség területén szintén kijelöltek egy új kezdőpontot, a Nagyszebentől ÉNY-ra levő Vízaknát ($\Phi = 45^\circ\,50'\,25,13", \Lambda_F = 41^\circ\,46'\,32,71"$). A mai Horvátország területén pedig az ivanicsi zárdatorony ($\Phi = 45^\circ\,44'\,21,25", \Lambda_F = 34^\circ\,05'\,09,16"$) adta a kezdőpontot [9].

A részletes térképek (1:144 000) szelvényezése és számozása a következőképpen történt: az oszlopokat (Colonne) betűkkel, a sorokat (Sectio) számokkal látták el. A betűk nyugatról kelet felé növekednek az abc-nek megfelelően, míg a számok északról déli irányba. A felmérési – 1:28 800-as méretarányú – térképeket hasonló módon szelvényezték, viszont itt az oszlopokat római számok jelölték.

Jankó (2001) szerint a Cassini–Soldner vetületet nem minden területen követték következetesen, ezért ezeken a területeken a térképnek nincs vetülete.

A térképek alapfelülete Bod (1982) szerint a Zach–Oriani hibrid ellipszoid: $a = 6\,376\,130\,m$, míg a lapultság 1/310 (amely az ellipszoid nagy féltengelyét a Zach-ellipszoidból, míg a lapultságát az Oriani-ellipszoidból származtatja).

8.2. Angol térképek Cassini–Soldner vetületben

Angliában a Brit Katonai Térképészeti Intézet (Ordnance Survey) alkalmazta a vetületet, egészen 1945-ig. Az első térkép, ami ezzel a vetülettel készült, az úgynevezett "Old Series one-inch maps of England and Wales", a felmérése 1805-től 1873-ig tartott. Két kezdőmeridiánja van, az ország déli részéhez Greenwich, az északihoz pedig Delamere.

Írország felmérésekor (1825-től) kiválasztottak egy pontot, ami nagyjából a felmérendő terület közepén helyezkedik el, és az ezen a ponton átmenő meridiánt választották ki kezdőmeridiánként. Így a hossztorzulás mértékét egyenletesen el tudták osztani a területen. Ezt a módszert később (1840 után) Nagy-Britanniára is alkalmazták.

Az I. Világháború alatt a Cassini-vetülettel készült térképek használhatatlanná váltak a tüzérség számára, hiszen a szögtorzulások miatt lehetetlenné vált a pontos célzás, ezért 1931-től áttértek a Transzverzális Mercator vetületre [2].

8.3. Olasz térképek Cassini–Soldner vetületben

Olaszországban a kataszteri felmérés kezdete 1886-ra tehető. A választott vetület a Cassini–Soldner lett. Az ország északi és középső területeihez az alapfelület a Genova Dátum 1874, a vetületi kezdőpont pedig $\Phi_0 = 44^\circ\,25'\,08,48''$, $\Lambda_0 = 8^\circ\,55'\,21,08''$ lett, $\alpha_0 = 117^\circ\,31'\,08,86''$-es azimuttal Monte del Telegrafo felé. Dél-Olaszország és Szicília felméréséhez használt alapfelületnek a Castanea delle Furle Dátumot választották, kezdőpontja pedig $\Phi_0 = 38^\circ\,15'\,53,38''$, $\Lambda_0 = 15^\circ\,31'\,18,435''$, $\alpha_0 =$

$271° \, 09' \, 16,26$"-es azimuttal Milazzo felé. Szardínia felmérésekor a Guardia Vecchia Dátumot alkalmazták, $\Phi_0 = 41° \, 13' \, 21,15$", $\Lambda_0 = 9° \, 23' \, 59,21$"-es középponttal, és $\alpha_0 = 156° \, 51' \, 01,34$"-es azimuttal La Curi felé. A választott dátumok alapját a Bessel-féle ellipszoid képezte [4].

8.2. ábra. Olaszország Cassini–Soldner vetületben

8.4. Norvég térképek Cassini–Soldner vetületben

A Norvég Térképészeti Intézet (NGO) 1833-ban jött létre. 1854-től nagy szaktudással és megfelelő eszközökkel új térképek készítésébe kezdett. Az első térképek a Cassini–Soldner vetületben készültek, Svandberg 1805-ös ellipszoidi alapfelülettel, ahol $a = 6\,376\,797 \, m$, míg a lapultság 1/304.2506. A kezdőpont pedig $\Phi_0 = 59° \, 54' \, 44$", $\Lambda_0 = 10° \, 43' \, 22,5$" volt.

1844-ben az ellipszoidi alapfelületet Bessel 1841-esre cserélték, és folytatták a térképek kiadását egészen 1890-ig. 1891-től a Cassini–Soldner vetületet leváltotta a poliéder vetület [3].

8.5. Izrael Cassini–Soldner vetületben

A Cassini–Soldner vetületben készült izraeli térképeket "Israeli Cassini Soldner"-nek is nevezik. Az alapfelület a Clarke 1880-as ellipszoid, módosítva: $a = 6\,378\,300\,m$, míg a lapultság 1/293.466. A kezdőpontja pedig $\Phi_0 = 31^\circ\,44'\,3"$, $\Lambda_0 = 35^\circ\,12'\,43,5"$ volt. Ahhoz, hogy elkerüljék a negatív koordinátákat, a kezdőpontot északra tolták 1 000 000 egységgel. A vetületet később a Transzverzális Mercator vetület váltotta le.

8.6. Egyéb alkalmazási területek

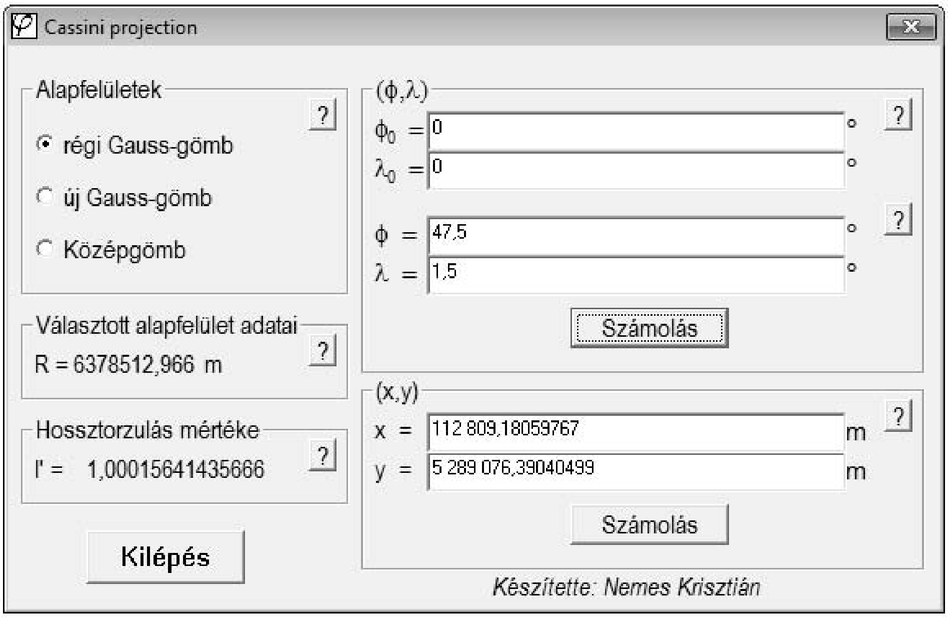
A vetületet használták még Németországban, Cipruson, a volt Csehszlovákia területén, Dániában, a volt Német Szövetségi Köztársaság területén, és Malajziában is (Clifford J. Mugnier 1985).

9. fejezet

Átszámító program bemutatása

A vetülethez készítettem két programot, melyek a földrajzi koordinátákból kiszámítják a síkbeli derékszögű koordinátákat, az első program a gömbi alapfelülettel, míg a második az ellipszoidival számol. A programok Microsoft Visual Basic 6.0-ban íródtak, a programkódok mellékelve megtalálhatóak.

9.1. Gömbi alapfelületen



9.1. ábra. A gömbi alapfelülettel számoló program

A gömbi alapfelülettel számoló program a feltaláló Cassini de Thury után a "Cassini-projection.exe" nevet kapta, és az általa levezetett képletek segítségével végzi a számolást. Először ki kell választanunk a kívánt alapfelületet, amivel számolni akarunk. Három gömb választható:

Név	R (m)
Régi Gauss-gömb	$6\,378\,512,966$
Új Gauss-gömb	$6\,379\,743,001$
Középgömb	$6\,371\,100$

9.1. táblázat. Választható gömbi alapfelületek

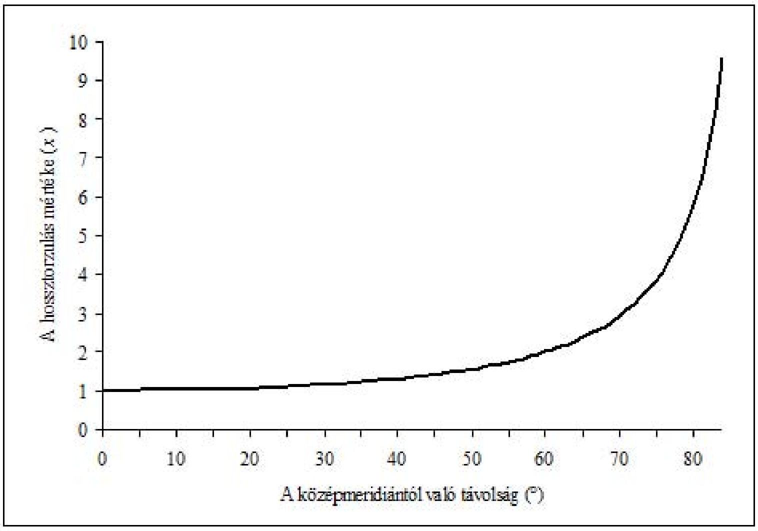
A gömbök a sugaruk nagyságában térnek el egymástól. A régi Gauss-gömböt Carl Friedrich Gauss, német matematikus találta fel, és először Franz Horsky alkalmazta hazánkban 1857-ben. Ez az ún. magyarországi Gauss-gömb. Az új Gauss-gömböt 1975-től alkalmazták hazánkban. A középgömb alatt a közepes sugarú Földet értjük. Már tudjuk, hogy a Föld kicsit lapított a sarkok felé, ott a sugár nagysága 6 356 752 méter, míg az Egyenlítőnél nagyobb, 6 378 137 méter. Így az átlagos Föld-sugár nagysága a programban 6 371 100 méter (Györffy).

Megjegyzés. A Föld sugarára különböző forrásokból más-más értéket találni.

Az alapfelület után meg kell adni egy kezdőpontot (φ_0, λ_0). Ez után két lehetőségünk van: egy megadott φ, λ szögű gömbi pontnak kiszámíttatjuk a derékszögű koordinátarendszerbeli x, y koordinátáját, vagy egy megadott x, y koordinátájú pont gömbi φ, λ szögét íratjuk ki a programmal. Ha az első lehetőséget választjuk, akkor a program kiszámítja a megadott meridián menti hossztorzulás mértékét (l').

Láthatjuk, hogy minél jobban távolodunk a középmeridiántól, a torzulás mértéke annál nagyobb lesz. A középmeridiántól 90°-ra levő meridiánnál előforduló torzulást már nem is érdemes ábrázolni a grafikonon, hiszen a hossztorzulás értéke a végtelenbe tart. 10-szeres hossztorzulás mellett már nem érdemes számolni, ezért a grafikon is csak a 84. fokig mutatja a hossztorzulás alakulását. A 89. fokhoz közeledve ez már több, mint 720-szoros volna.

Az ablakon található kérdőjelet ábrázoló gombok segítséget nyújtanak a program használatához.



9.2. ábra. A hossztorzulás mértéke (l') a középmeridiánnal párhuzamosan

9.2. Ellipszoidi alapfelületen

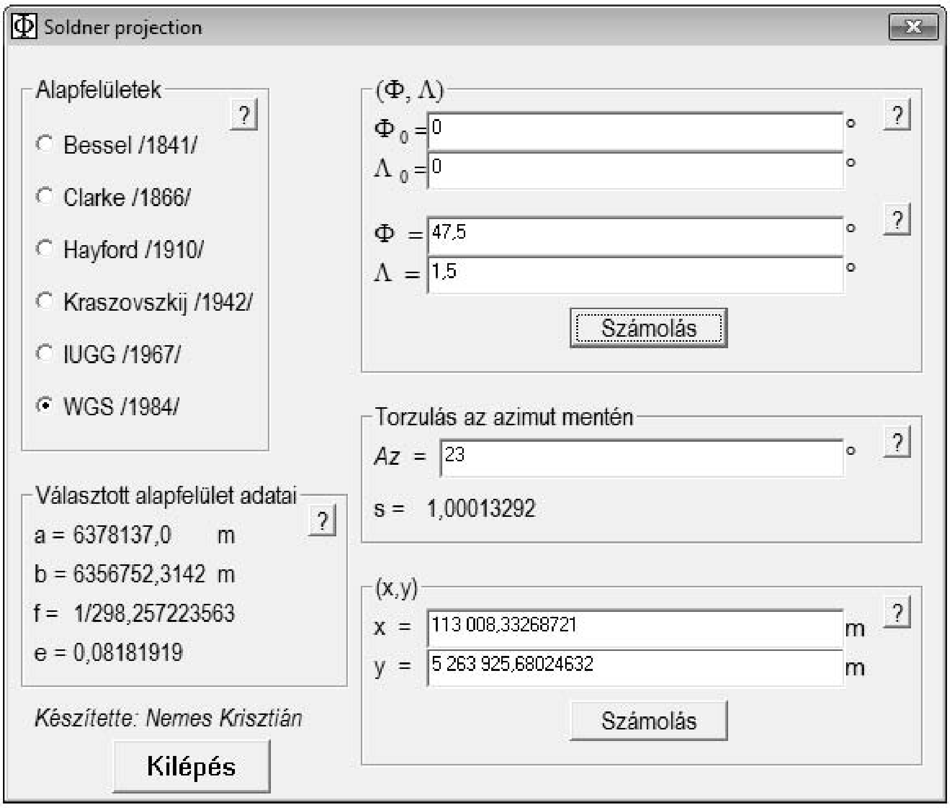
Az ellipszoidi alapfelülettel számoló program pedig J. G. Soldner után a "Soldner projection.exe" nevet kapta. A program a már fentebb bemutatott képletekkel számol, működése teljes mértékben megegyezik a másik programéval. Itt több alapfelület közül választhatunk:

Név	a (m)	b (m)	f	e
Bessel	$6\,377\,397,155$	$6\,356\,078,965$	$1/299,1528434$	$0,08169683$
Clarke	$6\,378\,206,4$	$6\,356\,583,8$	$1/294,9786982$	$0,08227185$
Hayford	$6\,378\,388,0$	$6\,356\,912,0$	$1/279,0$	$0,08199179$
Kraszovszkij	$6\,378\,245,0$	$6\,356\,863,0$	$1/298,2997381$	$0,08181337$
IUGG '67	$6\,378\,160,0$	$6\,356\,775,0$	$1/298,25$	$0,08181964$
WGS '84	$6\,378\,137,0$	$6\,356\,752,3142$	$1/298,257223563$	$0,08181919$

9.2. táblázat. Választható ellipszoidi alapfelületek

A táblázat szemlélteti az egyes ellipszoidok közötti különbséget. A Bessel-ellipszoidot 1841-ben találta fel Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). A Clarke-féle ellipszoidok közül a program az 1866-ost használja, mely Alexander Ross Clarke (1828-1914) nevéhez fűződik. A Hayford-ellipszoidot 1910-ben találta fel John Fillmore Hayford (1868-1925). A Kraszovszkij-féle ellipszoid Feodosy Nikolaevich Krasovsky (1878-1948) nevéhez fűződik. Az IUGG '67 egy nemzetközi vetület, 1967-ben vezették be, hasonlóan a WGS '84-hez, amit pedig 1984-ben.

A változás az előző programhoz képest az, hogy a programban megadhatunk egy tetszőleges Az azimutot, ami mentén Φ és x ismeretében a program kiszámítja a hossztorzulás mértékét.



9.3. ábra. Az ellipszoidi alapfelülettel számoló program

9.3. Összehasonlítás

Most hasonlítsuk össze a gömbi és ellipszoidi leképezést pontosság szempontjából. Ezt legegyszerűbben táblázat formájában lehet szemléltetni. Kiválasztjuk egy ismert gömbi (ellipszoidi) pont (mondjuk egy település) szögeit, majd a program segítségével kiszámoljuk annak a pontnak az x, y síkbeli derékszögű koordinátáit, méterben megadva. A kezdőpont koordinátái $\varphi_0 = 0°, \lambda_0 = 0°$.

Név	φ	λ	$x_g(\varphi, \lambda)$	$y_g(\varphi, \lambda)$
Budapest	$47,5°$	$19°$	$1\,412\,879,91051588$	$5\,459\,097,92702025$
London	$51,5°$	$-0,12°$	$-8\,306,58298245$	$5\,726\,635,41427901$
New York	$40,7°$	$-74°$	$-5\,202\,114,01325248$	$8\,031\,905,53809493$
Moszkva	$55,75°$	$37,6°$	$2\,233\,241,86160822$	$6\,855\,866,53050001$
Sao Paulo	$-23,55°$	$-46,64°$	$-4\,647\,735,72253065$	$-3\,603\,654,84104266$

9.3. táblázat. A gömbről való leképezés eredménye

A kiválasztott pontok nagyobb városok, eltérő szélességi és hosszúsági körökön.

Név	Φ	Λ	$x_e(\Phi, \Lambda)$	$y_e(\Phi, \Lambda)$
Budapest	$47,5°$	$19°$	$1\,417\,021,46663608$	$5\,440\,633,80850469$
London	$51,5°$	$-0,12°$	$-8\,332,85826560$	$5\,707\,719,08123719$
New York	$40,7°$	$-74°$	$-5\,256\,351,23374956$	$8\,042\,242,10446615$
Moszkva	$55,75°$	$37,6°$	$2\,240\,671,38723895$	$6\,841\,896,40025299$
Sao Paulo	$-23,55°$	$-46,64°$	$-4\,659\,739,47854236$	$-3\,553\,932,35384741$

9.4. táblázat. Az ellipszoidról való leképezés eredménye

Most vessük össze a két táblázat x és y oszlopát. Az értékek méterben értendők. Láthatjuk, hogy az x irányú eltérések 26 és 12 000 méter között ingadoznak, míg

Név	$\lvert x_g - x_e\rvert$	$\lvert y_g - y_e\rvert$
Budapest	$4141,55612$	$18464,11852$
London	$26,27528315$	$18916,33304$
New York	$54237,2205$	$10336,56637$
Moszkva	$7429,525631$	$13970,13025$
Sao Paulo	$12003,75601$	$49722,4872$

9.5. táblázat. A leképezések közötti eltérés

az y tengely iránybában ez az érték már 10 000 és 49 000 között mozog. Ezek a hibák az ellipszoidról való leképezés pontatlanságából adódnak. Láthatjuk, hogy a kezdőponttól ($\varphi_0 = 0°, \lambda_0 = 0°$) kis távolságra – mint például London – ez az eltérés igen kicsi: $26,27528315$ méter, míg a kezdőponttól távolabb levő pontok esetében (mint Sao Paulo) már akár 50 ezer méter is lehet. Ez is bizonyítja, hogy az ellipszoidi formulát csak a kezdőponttól 3-4°-nyi távolságig alkalmazhatjuk.

Irodalomjegyzék

[1] Györffy J., *Vetülettan 1*,
http://mercator.elte.hu/∼gyorffy/jegyzete/MScVettan/MScVet1.html, 2002.

[2] J. B. Harley, *Ordnance Survey Maps A descriptive manual*, Southampton, 1975.

[3] C. J. Mugnier, *Grids & Datums of The Kingdom of Norway*,
www.asprs.org/resources/GRIDS/10-99-norway.pdf, 2005.

[4] C. J. Mugnier, *PE&RS Grids and Datums August 2005 Issue - Italian Republic*,
http://www.asprs.org/resources/Grids/08-2005-italy.pdf, 2005.

[5] T. Pearce, *GN07-2 Conversion and Transformation Formulas*,
http://www.epsg.org/guides/docs/G7-2.pdf, 2009.

[6] J. P. Snyder, *Map Projections: A Working Manual*, Washington, 1987.

[7] Strenk T.–Varga J., *A vetületnélküli rendszer eredete* (kézirat), 1986.

[8] Timár G–Molnár G., *A II. katonai felmérés térképeinek közelítő vetületi és alapfelületi leírása a térinformatikai alkalmazások számára*,
http://sas2.elte.hu/pub.htm, 2003.

[9] Varga J., *A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig*,
http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm, 2002.

[10] Varga J., *Vetülettan*,
http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/vetulettan/vetulet.doc, 2010.

Ábrák forrásai

2.1. ábra: A Föld gömbi, és valódi alakja (eltúlozva)
http://www.answering-christianity.com/agu_earth_browse.jpg

4.1. ábra: A normál, és transzverzális hengervetület
http://maps.unomaha.edu/Peterson/gis/notes/MapProjCoord.html

5.3. ábra: A Föld Cassini-vetületben (sík)
http://www.csiss.org/map-projections/Cylindrical/Cassini.pdf

7.1. ábra: A Párizson áthaladó meridián háromszögelése
http://www.catnaps.org/cassini/cassgraphics/triangle.png

7.2. ábra: Cassini de Thury
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cc/
César-François_Cassini_-_Jean-Marc_Nattier.jpg

7.3. ábra: J.G. Soldner
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Johann_Georg_Soldner_2.jpg

8.2. ábra: Olaszország Cassini–Soldner vetületben
http://2.bp.blogspot.com/_ze2ljU3hS-E/SbpubDX1dFI/
AAAAAAAABks/wef9_81P81g/s1600-h/Italia-CS-Web.jpg

Mellékletek

Cassini-projection.exe

```
Dim R As Double
Dim h As Double
Dim B As Double
Dim D As Double
Dim l As Double
Dim arcB As Double
Dim arcD As Double
Dim f As Double
Dim fn As Double
Dim ln As Double
Dim x As Double
Dim y As Double
Dim alap As Integer
Const vbKeyDecPt = 46
Const vbKeyminus = 45
Const pi = 3.14159265358979

'Kilépés
Private Sub Command1_Click()
MSG = MsgBox("Biztosan kilép?", vbYesNo + vbQuestion, "Kilépés")
If MSG = 6 Then
End
Else
End If
End Sub

'ALAPFELÜLET help
Private Sub Command2_Click()
MSG = "Kiválaszthatjuk a kívánt gömbi alapfelületet."
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'Fi0, Lambda0 help
Private Sub Command3_Click()
MSG = "Ahhoz, hogy kiszámoljuk egy pont fi és lambda szögét, meg kell
adnunk egy már ismert pont szögeit. A tizedesvesszőt a - , - jellel kell
megadni! A fi értékei -90 és 90, míg a lambda értékei -89,99 és 89,99
közötti értéket vehetnek fel!"
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
```

```
End Sub

'Fi és Lambda megadás help
Private Sub Command5_Click()
MSG = "Megadhatjuk egy pont ismert fi és lambda szögeit, és ebből a
program kiszámolja annak a pontnak az x és y koordinátáit. A
tizedesvesszőt a - , - jellel kell megadni! A fi értékei -90 és 90,
míg a lambda értékei -89,99 és 89,99 közötti értéket vehetnek fel!"
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'x,y help
Private Sub Command4_Click()
MSG = "Megadhatjuk egy pont ismert x és y koordinátáit, és ebből a
program visszaszámolja annak a pontnak a fi szélességi és lambda
hosszúsági szögét. A tizedesvesszőt a - , - jellel kell megadni! Az
x és y értékei -10000000 és 10000000 közötti értéket vehetnek fel!"
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

' X ÉS Y KISZÁMOLÁSA
Private Sub Command6_Click()
If alap = 0 Then
MSG = MsgBox("Nincs kiválasztva alapfelület!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If finfin.Text = "" Or lanlan.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva az ismert viszonyítási pont fi vagy lambda
értéke!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If fifi.Text = "" Or lala.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva a pont ismert fi vagy lambda értéke!",
vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If alap = 1 And finfin.Text <> "" And lanlan.Text <> "" And fifi.Text <>
"" And lala.Text <> "" Then
'adatok megadása
fi = fifi.Text
la = lala.Text
fin = finfin.Text
lan = lanlan.Text
If lan > 89.99 Or lan < -89.99 Or la < -89.99 Or la > 89.99 Then
MSG = MsgBox("A lambda-értékek nem megfelelőek!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
Else
If fin > 90 Or fin < -90 Or fi > 90 Or fi < -90 Then
MSG = MsgBox("A fi-értékek nem nem megfelelőek!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba") '
Else 'torzítás
B = Cos(fi * (pi / 180)) * Sin(la * (pi / 180) - lan * (pi / 180))
h = (1 / Sqr(1 - (B ^ 2)))
hh.Caption = h
arcB = Atn(B / Sqr(1 - B ^ 2))          'Sin(fi * pi / 180) = fok
'x                                       'Sin(fi) = rad
x = R * arcB
If x > 10000000 Then
x = 10000000
```

```
End If
If x < -10000000 Then
x = -10000000
End If
xx.Text = FormatNumber(x, 8)
'y
y = R * (Atn(Tan(fi * (pi / 180)) / Cos(la * (pi / 180) - lan * (pi / 180))
- fin * (pi / 180)))
If y > 10000000 Then
y = 10000000
End If
If y < -10000000 Then
y = -10000000
End If
yy.Text = FormatNumber(y, 8)
End If
End If
End If
End Sub

'FI és LAMBDA KISZÁMOLÁSA
Private Sub Command7_Click()
If alap = 0 Then
MSG = MsgBox("Nincs kiválasztva alapfelület!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If finfin.Text = "" Or lanlan.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva az ismert viszonyítási pont fi vagy lambda értéke!",
vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If yy.Text = "" Or xx.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva a pont ismert x vagy y koordinátája!", vbOKOnly +
vbCritical, "Hiba")
End If
If alap = 1 And finfin.Text <> "" And lanlan.Text <> "" And yy.Text <> "" And
xx.Text <> "" Then
If xx.Text <= 10000000 And xx.Text >= -10000000 And yy.Text <= 10000000 And
yy.Text >= -10000000 And finfin.Text <= 90 And finfin.Text >= -90 And lanlan.Text
> -90 And lanlan.Text < 90 Then
'adatok megadása
x = xx.Text
y = yy.Text
fin = finfin.Text * pi / 180
lan = lanlan.Text * pi / 180
D = ((y / R) + fin)
arcD = (Sin(D) * Cos(x / R))
fi = Atn((arcD) / Sqr(1 - (arcD ^ 2)))
la = (lan + Atn(Tan(x / R) / Cos(D)))
If fi > 90 Then
fi = 90
End If
If la > 90 Then
la = 90
End If
If fi < -90 Then
```

```
fi = -90
End If
If la < -90 Then
la = -90
End If
fifi.Text = FormatNumber((fi * 180 / pi), 8)
lala.Text = FormatNumber((la * 180 / pi), 8)
Else
MSG = MsgBox("A megadott viszonyítási pont fi vagy lambda értéke, esetleg a
megadott x vagy y koordináta értéke nem megfelelő!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
End If
End Sub
'l' HELP
Private Sub Command8_Click()
MSG = "A beírt fi és lambda szögek alapján megkapjuk a hossztorzulás mértékét
az adott meridián mentén."
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'FÖLDGÖMB
Private Sub FG_Click(Index As Integer)
R = 6371100#
alap = 1
RR.Caption = "6371100,000"
End Sub

'INDÍTÁS
Private Sub Form_Load()
alap = 0
End Sub

'RÉGI GAUSS
Private Sub rGg_Click(Index As Integer)
R = 6378512.966
alap = 1
RR.Caption = "6378512,966"
End Sub

'SUGÁR help
Private Sub Rhelp_Click()
MSG = "A kiválasztott gömbi alapfelülethez tartozó sugár nagysága méterben."
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'ÚJ GAUSS
Private Sub uGg_Click(Index As Integer)
R = 6379743.001
alap = 1
RR.Caption = "6379743,001"
End Sub
```

Soldner-projection.exe

```
Dim AA As Double
Dim BB As Double
Dim N As Double
Dim Nn As Double
Dim R As Double
Dim Rr As Double
Dim T As Double
Dim Tt As Double
Dim A As Double
Dim C As Double
Dim D As Double
Dim M As Double
Dim Mm As Double
Dim Mn As Double
Dim u As Double
Dim f As Double
Dim e As Double
Dim gg As Double
Dim s As Double
Dim fi As Double
Dim fin As Double
Dim fiu As Double
Dim la As Double
Dim lan As Double
Dim X As Double
Dim Y As Double
Dim alap As Integer
Dim Az As Double
Const pi = 3.14159265358979

'BESSEL
Private Sub bessel_Click(Index As Integer)
aaa.Caption = "6377397,155"
AA = 6377397.155
alap = 1
bbb.Caption = "6356078,965"
BB = 6356078.965
ff.Caption = "1/299,1528434"
f = (1 / 299.1528434)
e = Sqr(((AA * AA) - (BB * BB)) / (AA * AA))
ee.Caption = FormatNumber(e, 8)
End Sub

'CLARKE
Private Sub clarke_Click(Index As Integer)
aaa.Caption = "6378206,4"
AA = 6378206.4
alap = 1
bbb.Caption = "6356583,8"
BB = 6356583.8
ff.Caption = "1/294,9786982"
f = (1 / 294.9786982)
```

```
e = Sqr(((AA * AA) - (BB * BB)) / (AA * AA))
ee.Caption = FormatNumber(e, 8)
End Sub

'Kilépés
Private Sub Command1_Click()
MSG = MsgBox("Biztosan kilép?", vbYesNo + vbQuestion, "Kilépés")
If MSG = 6 Then
End
Else
End If
End Sub

'ALAPFELÜLET help
Private Sub Command2_Click()
MSG = "Kiválaszthatjuk a kívánt ellipszoidi alapfelületet."
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'Fi0, Lambda0 help
Private Sub Command3_Click()
MSG = "Ahhoz, hogy kiszámoljuk egy pont Fi és Lambda szögét, meg kell
adnunk egy már ismert pont szögeit. A tizedesvesszőt a - , - jellel kell
megadni! A Fi értékei -90 és 90, míg a Lambda értékei -89,99 és 89,99
közötti értéket vehetnek fel!"
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'Fi és Lambda megadás help
Private Sub Command5_Click()
MSG = "Megadhatjuk egy pont ismert Fi és Lambda szögeit, és ebből a program
kiszámolja annak a pontnak az x és y koordinátáit. A tizedesvesszőt a - , -
jellel kell megadni! A Fi értékei -90 és 90, míg a Lambda értékei -89,99 és 89,99
közötti értéket vehetnek fel!"
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'x,y help
Private Sub Command4_Click()
MSG = "Megadhatjuk egy pont ismert x és y koordinátáit, és ebből a program
visszaszámolja annak a pontnak a Fi szélességi és Lambda hosszúsági szögét.
A tizedesvesszőt a - , - jellel kell megadni! Az x és y értékei -10000000 és
10000000 közötti értéket vehetnek fel!"
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

' X ÉS Y KISZÁMOLÁSA
Private Sub Command6_Click()
If alap = 0 Then
MSG = MsgBox("Nincs kiválasztva alapfelület!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If finfin.Text = "" Or lanlan.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva az ismert viszonyítási pont fi vagy lambda értéke!",
vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
```

```
End If
If fifi.Text = "" Or lala.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva a pont ismert fi vagy lambda értéke!", vbOKOnly +
vbCritical, "Hiba")
End If
If alap = 1 And finfin.Text <> "" And lanlan.Text <> "" And fifi.Text <> "" And
lala.Text <> "" Then
'adatok megadása
fi = fifi.Text
la = lala.Text
fin = finfin.Text
lan = lanlan.Text
If lan > 89.99 Or lan < -89.99 Or la < -89.99 Or la > 89.99 Then
MSG = MsgBox("A lambda-értékek nem megfelelőek!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
Else
If fin > 90 Or fin < -90 Or fi > 90 Or fi < -90 Then
MSG = MsgBox("A fi-értékek nem nem megfelelőek!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba") '
Else
'alap adatok
Az = AzAz.Text
N = AA / Sqr(1 - (e * e * Sin(fi * pi / 180) * Sin(fi * pi / 180))) 'Sin(fi * pi / 180) = fok
T = Tan(fi * pi / 180) * Tan(fi * pi / 180)                          'Sin(fi) = rad
A = (la * pi / 180 - lan * pi / 180) * Cos(fi * pi / 180)
C = (e * e * Cos(fi * pi / 180) * Cos(fi * pi / 180)) / (1 - e * e)
M = AA * ((1 - (e * e / 4) - (3 * (e ^ 4) / 64) - (5 * (e ^ 6) / 256)) * (fi * pi
/ 180) - ((3 * (e ^ 2) / 8) + (3 * (e ^ 4) / 32) + (45 * (e ^ 6) / 1024)) * Sin(2 *
fi * pi / 180) + ((15 * (e ^ 4) / 256) + (45 * (e ^ 6) / 1024)) * Sin(4 * fi * pi /
180) - (35 * (e ^ 6) / 3072) * Sin(6 * fi * pi / 180))
Mm = AA * ((1 - (e * e / 4) - (3 * (e ^ 4) / 64) - (5 * (e ^ 6) / 256)) * (fin * pi /
180) - ((3 * (e ^ 2) / 8) + (3 * (e ^ 4) / 32) + (45 * (e ^ 6) / 1024)) * Sin(2 * fin *
pi / 180) + ((15 * (e ^ 4) / 256) + (45 * (e ^ 6) / 1024)) * Sin(4 * fin * pi / 180) -
(35 * (e ^ 6) / 3072) * Sin(6 * fin * pi / 180))
'X
X = N * (A - T * (A ^ 3) / 6 - (8 - T + 8 * C) * T * (A ^ 5) / 120)
xx.Text = FormatNumber(X, 4)
'Y
Y = M - Mm + N * Tan(fi * pi / 180) * ((A ^ 2) / 2 + (5 - T + 6 * C) * (A ^ 4) / 24)
yy.Text = FormatNumber(Y, 4)
s = 1 + (X ^ 2) * Cos(Az * pi / 180) * Cos(Az * pi / 180) * ((1 - (e ^ 2) * Sin(fi *
pi / 180) * Sin(fi * pi / 180)) ^ 2) / (2 * (AA ^ 2) * (1 - (e ^ 2)))
torz.Caption = FormatNumber(s, 8)
End If
End If
End If
End Sub

'FI és LAMBDA KISZÁMOLÁSA
Private Sub Command7_Click()
If alap = 0 Then
MSG = MsgBox("Nincs kiválasztva alapfelület!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
If finfin.Text = "" Or lanlan.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva az ismert viszonyítási pont fi vagy lambda értéke!",
vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
```

```
End If
If yy.Text = "" Or xx.Text = "" Then
MSG = MsgBox("Nincs megadva a pont ismert x vagy y koordinátája!", vbOKOnly +
vbCritical, "Hiba")
End If
If alap = 1 And finfin.Text <> "" And lanlan.Text <> "" And yy.Text <> "" And
xx.Text <> "" Then
If xx.Text <= 10000000 And xx.Text >= -10000000 And yy.Text <= 10000000 And
yy.Text >= -10000000 And finfin.Text <= 90 And finfin.Text >= -90 And lanlan.Text
> -90 And lanlan.Text < 90 Then
'adatok megadása
X = xx.Text
Y = yy.Text
fin = finfin.Text * pi / 180
lan = lanlan.Text * pi / 180
Mg = AA * ((1 - (e * e / 4) - (3 * (e ^ 4) / 64) - (5 * (e ^ 6) / 256)) * (fin)
- ((3 * (e ^ 2) / 8) + (3 * (e ^ 4) / 32) + (45 * (e ^ 6) / 1024)) * Sin(2 * fin)
+ ((15 * (e ^ 4) / 256) + (45 * (e ^ 6) / 1024)) * Sin(4 * fin) - (35 * (e ^ 6) /
3072) * Sin(6 * fin))
Mn = Y + Mg
gg = (1 - Sqr(1 - (e ^ 2))) / (1 + Sqr(1 - (e ^ 2)))
u = Mn / (AA * (1 - ((e ^ 2) / 4) - (3 * (e ^ 4) / 64) - (5 * (e ^ 6) / 256) -
(7 * (e ^ 8) / 1024)))
fiu = u + ((3 * gg / 2) - (27 * (gg ^ 3) / 32)) * Sin(2 * u) + (21 * (gg ^ 2) / 16)
- (55 * (gg ^ 4) / 32) * Sin(4 * u) + (151 * (gg ^ 3) / 96) * Sin(6 * u) + (1097 *
(gg ^ 4) / 512) * Sin(8 * u)
Tt = Tan(fiu) * Tan(fiu)
Nn = AA / (Sqr(1 - (e ^ 2) * Sin(fiu) * Sin(fiu)))
Rr = AA * (1 - (e ^ 2)) / (Sqr((1 - (e ^ 2) * Sin(fiu) * Sin(fiu)) ^ 3))
D = X / Nn
'FI
fi = fiu - (Nn * Tan(fiu) / Rr) * (((D ^ 2) / 2) - (1 + 3 * Tt) * ((D ^ 4) / 24))
'LAMBDA
la = lan + (D - Tt * ((D ^ 3) / 3) + (1 + 3 * Tt) * Tt * ((D ^ 5) / 15)) / Cos(fiu)
fifi.Text = FormatNumber((fi * 180 / pi), 10)
lala.Text = FormatNumber((la * 180 / pi), 10)
Else
MSG = MsgBox("A megadott viszonyítási pont fi vagy lambda értéke, esetleg a megadott
x vagy y koordináta értéke nem megfelelő!", vbOKOnly + vbCritical, "Hiba")
End If
End If
End Sub

'l' HELP
Private Sub Command8_Click()
MSG = "A beírt Fi szög és x koordináta alapján megkapjuk a hossztorzulás mértékét
a kiválasztott Az azimut mentén, amit északtól keleti irányba kell megadni."
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'INDÍTÁS
Private Sub Form_Load()
alap = 0
End Sub
```

```
'HAYFORD
Private Sub hayford_Click()
aaa.Caption = "6378388,0"
AA = 6378388
alap = 1
bbb.Caption = "6356912,0"
BB = 6356912
ff.Caption = "1/297,0"
f = (1 / 297)
e = Sqr(((AA * AA) - (BB * BB)) / (AA * AA))
ee.Caption = FormatNumber(e, 8)
End Sub

'IUGG
Private Sub iugg_Click()
aaa.Caption = "6378160,0"
AA = 6378160
alap = 1
bbb.Caption = "6356775,0"
BB = 6356775
ff.Caption = "1/298,25"
f = (1 / 298.25)
e = Sqr(((AA * AA) - (BB * BB)) / (AA * AA))
ee.Caption = FormatNumber(e, 8)
End Sub

'KRASZOVSZKIJ
Private Sub kraszovszkij_Click(Index As Integer)
aaa.Caption = "6378245,0"
AA = 6378245
alap = 1
bbb.Caption = "6356863,0"
BB = 6356863
ff.Caption = "1/298,2997381"
f = (1 / 298.2997381)
e = Sqr(((AA * AA) - (BB * BB)) / (AA * AA))
ee.Caption = FormatNumber(e, 8)
End Sub

'SUGÁR help
Private Sub Rhelp_Click()
MSG = "A kiválasztott ellipszoidi alapfelülethez tartozó fél nagytengely (a),
fél kistengyely (b), a lapultság (f), és az első excentricitás (e) nagysága."
MsgBox MSG, vbOKOnly, "Súgó"
End Sub

'WGS
Private Sub wgs_Click()
aaa.Caption = "6378137,0"
AA = 6378137
alap = 1
bbb.Caption = "6356752,3142"
BB = 6356752.3142
```

```
ff.Caption = "1/298,257223563"
f = (1 / 298.257223563)
e = Sqr(((AA * AA) - (BB * BB)) / (AA * AA))
ee.Caption = FormatNumber(e, 8)
End Sub
```